2.2. Статистические характеристики огибающей смеси сигнала и шума

Линейный АД имеет линейную детекторную характеристику, оставаясь при этом нелинейным устройством относительно мгновенных значений напряжения. Напряжение на выходе безынерционного линейного АД прямо пропорционально огибающей входного колебания $U(t)$:

$$U_{\text{д}}(t) = K_{\text{д}}U(t),$$

где $K_{\text{д}}$ – коэффициент передачи детектора. Поэтому для определения статистических характеристик шумового напряжения на выходе такого АД нужно знать статистические характеристики огибающей смеси сигнала и квазигармонического шума на его входе, т.е. на выходе БВЧ радиоприёмника.

Рассмотрим сначала статистические характеристики огибающей шума. Квазигармоническое шумовое колебание, имеющее огибающую $U(t)$ и фазу $\varphi(t)$, можно представить в виде алгебраической суммы двух квадратурных составляющих [1]:

$$u(t) = U(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right) = U(t)\cos\varphi(t)\cdot\cos\omega_0 t - U(t)\sin\varphi(t)\cdot\sin\omega_0 t =$$

$$= U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)\cdot\cos\omega_0 t - U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)\cdot\sin\omega_0 t,$$

где $U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t) = U(t)\cos\varphi(t)$ – косинусная (синфазная) низкочастотная составляющая;

$U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t) = U(t)\sin\varphi(t)$ – синусная (квадратурная) низкочастотная составляющая.

Низкочастотные косинусная и синусная составляющие квазигармонического колебания представляют собой медленно изменяющиеся по сравнению с $u(t)$ случайные процессы.

Шум радиоприёмника имеет нормальное распределение вероятностей с плотностью

$$w(u) = \frac{1}{U_{\text{ш}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2U_{\text{ш}}^2}},$$

где $U_{\text{ш}}$ – эффективное напряжение шума. Из курса «Статистическая радиотехника» известно, что в этом случае низкочастотные квадратурные составляющие шума имеют следующие основные свойства [1].

1) $U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)$ и $U^{\text{s}}(t)$ являются нормальными случайными процессами с нулевым средним значением:

$$\overline{U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)} = \overline{U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)} = 0 .$$

2) Дисперсии низкочастотных составляющих одинаковы и равны дисперсии квазигармонического шума

$$\overline{\left[U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)\right]^2} = \overline{\left[U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)\right]^2} = U_{\text{ш}}^2 .$$

3) АКФ этих составляющих также одинаковы и равны

$$K_{U_{\text{ш}}^{\text{c}}}(\tau) = K_{U_{\text{ш}}^{\text{s}}}(\tau) = U_{\text{ш}}^2 \psi(\tau) ,$$

где $\psi(\tau)$ – огибающая нормированной АКФ шума.

Замечание: свойство 2 – частный случай свойства 3, поскольку $\overline{U(t)^2} = K_U(0)$.

4) В совпадающие моменты времени синусная и косинусная низкочастотные составляющие взаимно некоррелированы:

$$\overline{U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t) U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)} = 0 .$$

5) Огибающая квазигармонического колебания выражается через синусную и косинусную составляющие как

$$U(t) = \sqrt{\left(U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)\right)^2 + \left(U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)\right)^2} .$$

Свойство 3 определяет важное соотношение между автокорреляционными функциями квазигармонического шума и его низкочастотных квадратурных составляющих: огибающей АКФ квазигармонического колебания является автокорреляционная функция его косинусной (либо синусной) низкочастотной составляющей. Поэтому АКФ квазигармонического шума можно записать как

$$K(\tau) = K_{U_{\text{ш}}^{\text{c}}}(\tau) \cos\omega_0\tau = K_{U_{\text{ш}}^{\text{s}}}(\tau) \cos\omega_0\tau .$$

Статистические характеристики огибающей шума на выходе БВЧ

Известно, что огибающая нормального квазигармонического случайного процесса имеет распределение Релея [1]:

$$w(U)=\frac{U}{U_{ш}^2}e^{-\frac{U^2}{2U_{ш}^2}}, \quad U\geq 0.$$

Плотность вероятности распределения Релея имеет максимум при $U=U_{ш}$, т.е. $U_{ш}$ является наиболее вероятным значением огибающей.

Основные статистические характеристики огибающей выражаются через эффективное напряжение квазигармонического шума $U_{ш}$ следующим образом [1]:

- среднее значение (постоянная составляющая) огибающей

$$\overline{U}=\int_0^{\infty}Uw(U)dU=\sqrt{\frac{\pi}{2}}U_{ш}\approx 1,25U_{ш},$$

(отсюда, в частности, следует, что $\overline{U}>U_{ш}$ и что поэтому среднее значение огибающей больше наиболее вероятного);

- дисперсия (мощность переменной составляющей на единичном сопротивлении) огибающей:

$$\sigma_U^2=\int_0^{\infty}\left(U-\overline{U}\right)^2 w(U)dU=\frac{4-\pi}{2}U_{ш}^2\approx 0,43U_{ш}^2;$$

- среднеквадратическое отклонение (СКО) (эффектное напряжение переменной составляющей) огибающей:

$$\sigma_U=\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}U_{ш}\approx 0,66U_{ш}.$$

Огибающая квазигармонического колебания – стационарный случайный процесс. Однако, её среднее значение не равно нулю, поэтому АКФ огибающей определяется как

$$K_U(\tau)=\overline{\left[U(t)-\overline{U(t)}\right]\left[U(t+\tau)-\overline{U(t+\tau)}\right]}.$$

Представим АКФ огибающей в нормированном виде:

$$K_U(\tau)=\sigma_U^2\rho_U(\tau),$$

где $\rho_U(\tau)$ – нормированная АКФ огибающей. Известно, что нормированная АКФ огибающей выражается через огибающую нормированной АКФ квазигармонического шума $\psi(\tau)$ в виде ряда по чётным степеням:

$$\rho_U(\tau) = \frac{\pi}{4-\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \psi^2(\tau) + \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 \psi^4(\tau) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \psi^6(\tau) + \ldots\right] \approx$$

$$\approx 0{,}915\psi^2(\tau) + 0{,}057\psi^4(\tau) + 0{,}014\psi^6(\tau) + \ldots.$$

Общее выражение для членов этого ряда, начиная со 2-го, имеет вид

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^2 \psi(\tau)^{2n} = \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\right)^2 \psi(\tau)^{2n}.$$

Для практических расчётов в ряде оставляют только 1-й член, коэффициент которого округляют до 1, и с погрешностью около 10% принимают, что

$$\rho_U(\tau) \approx \psi^2(\tau).$$

Таковы основные статистические характеристики огибающей квазигармонического шума.

Статистические характеристики огибающей смеси сигнала и шума на выходе узкополосного БВЧ

Рассмотрим основные статистические характеристики огибающей суммы немодулированного гармонического сигнала и узкополосного (квазигармонического) шума. Соотношение интенсивностей сигнала и шума на выходе БВЧ будем характеризовать параметром, равным отношению амплитуды сигнала к эффективному напряжению шума:

$$a = \frac{U_\text{с}}{U_\text{ш}}.$$

Для упрощения анализа примем, что частота сигнала совпадает с центральной частотой спектра шума ω_0 (это условие обычно выполняется на практике):

$$u_\text{с}(t) = U_\text{с}\cos\omega_0 t.$$

Представим шум в виде суммы квадратурных составляющих:

$$u_\text{ш}(t) = U_\text{ш}^\text{c}(t)\cos\omega_0 t - U_\text{ш}^\text{s}(t)\sin\omega_0 t.$$

Тогда сумма сигнала и шума будет равна

$$u_{\text{с}}(t)+u_{\text{ш}}(t)=\left[U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)+U_{\text{с}}\right]\cos\omega_0 t-U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)\sin\omega_0 t=$$

$$=U_{\text{с+ш}}^{\text{c}}(t)\cos\omega_0 t-U_{\text{с+ш}}^{\text{s}}(t)\sin\omega_0 t=V(t)\cos\left[\omega_0 t+\theta(t)\right],$$

где $U_{\text{с+ш}}^{\text{c}}(t)=U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)+U_{\text{с}}$ и $U_{\text{с+ш}}^{\text{s}}(t)=U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)$ – косинусная и синусная низкочастотные составляющие суммы сигнала и шума; $V(t)$ и $\theta(t)$ – огибающая и фаза суммы сигнала и шума соответственно.

Огибающая и фаза суммы сигнала и шума выражаются через низкочастотные квадратурные составляющие следующим образом:

$$V(t)=\sqrt{U_{\text{с+ш}}^{\text{c}}(t)^2+U_{\text{с+ш}}^{\text{s}}(t)^2}=\sqrt{\left[U_{\text{с}}+U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)\right]^2+U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)^2},$$

$$\theta(t)=\operatorname{arctg}\frac{U_{\text{с+ш}}^{\text{s}}(t)}{U_{\text{с+ш}}^{\text{c}}(t)}=\operatorname{arctg}\frac{U_{\text{ш}}^{\text{s}}(t)}{U_{\text{с}}+U_{\text{ш}}^{\text{c}}(t)}.$$

Комплексную огибающую суммы сигнала и шума можно представить с помощью векторной диаграммы, изображённой на рис. 2.5. На этой диаграмме огибающая суммы сигнала и шума равна длине суммарного вектора:

$$V(t)=\left|\dot{U}_{\text{с+ш}}(t)\right|.$$

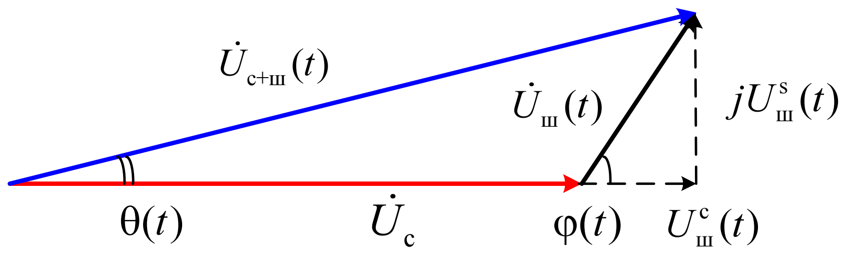

Рис. 2.5. Векторная диаграмма комплексной огибающей суммы сигнала и шума

Плотность вероятности огибающей суммы сигнала и шума описывается законом Райса

$$w(V)=\frac{V}{U_{\text{ш}}^2}I_0\left(\frac{VU_{\text{с}}}{U_{\text{ш}}^2}\right)e^{-\frac{V^2+U_{\text{с}}^2}{2U_{\text{ш}}^2}},\quad V\geq 0,$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 0-го порядка.

Вид распределения Райса зависит от величины отношения сигнал-шум $a = \dfrac{U_с}{U_ш}$. Графики распределения Райса при $U_ш = 1$ для различных значений $U_с$ приведены на рис. 2.6. Видно, что с увеличением амплитуды сигнала график плотности вероятности огибающей сдвигается вправо и становится всё более симметричным. Используя асимптотическую формулу для модифицированной функции Бесселя*), можно показать, что при большом отношении сигнал-шум распределение Райса переходит в нормальное распределение вероятностей с математическим ожиданием $U_с$ и дисперсией $U_ш^2$.

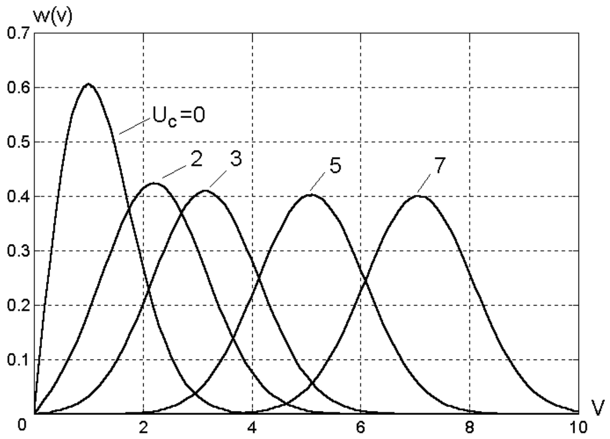

Рис. 2.6. Плотность вероятности распределения Райса при $U_ш = 1$

Этот результат можно качественно объяснить с помощью векторной диаграммы, изображённой на рис. 2.7. При $a = \dfrac{U_с}{U_ш} >> 1$ синусная составляющая шума практически не влияет на огибающую суммы сигнала и шума и поэтому $V(t) = \left|\dot{U}_{с+ш}(t)\right| \approx U_с + U_ш^С(t)$. А поскольку косинусная составляющая шума $U_ш^С(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и дисперсией $U_ш^2$, то огибающая V при $a >> 1$ также имеет нормальное распределение со средним значением $U_с$ и дисперсией $U_ш^2$.

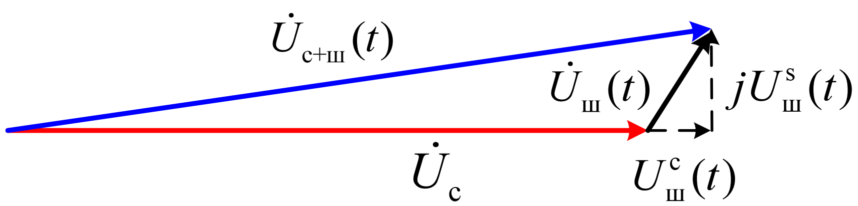

Рис. 2.7. Векторная диаграмма комплексной огибающей суммы сигнала и шума при $a >> 1$

---

*) При $x >> 1$ $I_0(x) \approx \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$.

Дополнительные сведения

Основные статистические характеристики огибающей суммы сигнала и шума определяются следующими соотношениями.

Среднее значение (постоянная составляющая) огибающей суммы сигнала и шума в общем случае равно

$$\overline{V} = \int_0^\infty V w_{\text{Райса}}(V) dV = U_{\text{ш}} M(a),$$

где

$$M(a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{a^2}{4}} \left[\left(1 + \frac{a^2}{2}\right) I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{2} I_1\left(\frac{a^2}{4}\right) \right],$$

$I_0(\cdot), I_1(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя 0-го и 1-го порядка соответственно. Для удобства определения $\overline{V}$ используется график функции $M(a)$, изображённый на рис. 2.8. Пунктирной линией показана асимптота кривой – линейная функция $M_{\text{асимп.}}(a) = a$.

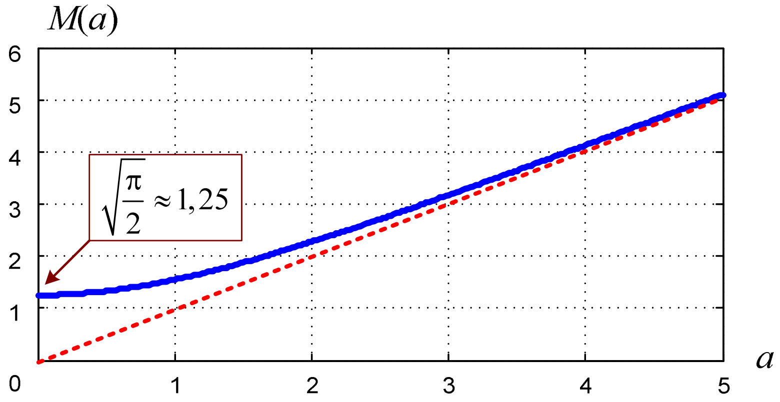

Рис. 2.8. График функции *M*(*a*)

Следовательно при $a >> 1$ (практически при $a > 3$) $M(a) \approx a = \frac{U_{\text{с}}}{U_{\text{ш}}}$ и среднее значение огибающей приблизительно равно амплитуде сигнала: $\overline{V} \approx U_{\text{с}}$. При $a = 3$ относительная погрешность этого приближённого равенства составляет около 10%. В общем случае среднее значение напряжения на выходе АД равно $\overline{U_{\text{д}}} = K_{\text{д}} \overline{V} = K_{\text{д}} U_{\text{ш}} M(a)$.

Среднеквадратичное отклонение (эффективное значение случайной составляющей) огибающей суммы сигнала и шума равно

$$\sigma_V = \sqrt{\int_0^\infty (V - \overline{V})^2 w_{\text{Райса}}(V) dV} = U_{\text{ш}} N(a),$$

где $N(a) = \sqrt{2 + a^2 - M^2(a)}$. График функции $N(a)$ показан на рис. 2.9.

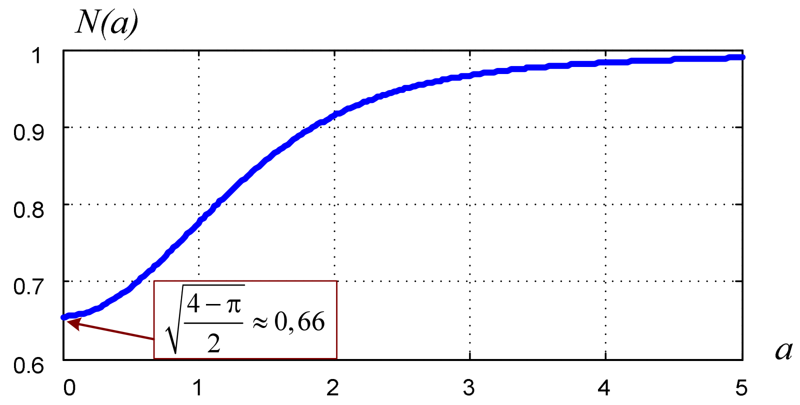

Рис. 2.9. График функции *N*(*a*)

При $a >> 1$ (практически при $a \geq 5$) $N(a) \approx 1$ и, следовательно, $\sigma_V \approx U_{ш}$. Эффективное напряжение шума на выходе АД равно $\sigma_{U_д} = K_д \sigma_V = K_д U_ш N(a)$.

Автокорреляционная функция огибающей приближённо равна [2, с. 407, формула (11.52)]:

$$K_V(\tau) \approx \frac{4-\pi}{2} U_ш^2 \left[b_1(a) \cdot \psi(\tau) + b_2(a) \cdot \psi^2(\tau) \right].$$

где

$$b_1(a) = \left\{ a e^{-\frac{a^2}{4}} \left[I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) + I_1\left(\frac{a^2}{4}\right) \right] \right\}^2,$$

$$b_2(a) = \left[e^{-\frac{a^2}{4}} I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) \right]^2 + \left[e^{-\frac{a^2}{4}} I_1\left(\frac{a^2}{4}\right) \right]^2.$$

Графики зависимости коэффициентов $b_1(a)$ и $b_2(a)$ от параметра *a* изображены на рис. 2.10. Заметим, что в соответствии с этой формулой при $a >> 1$, когда $b_1(a) \approx 8/\pi$ и $b_2(a) \approx 0$, дисперсия огибающей равна $\sigma_V^2 = K_V(0) \approx \frac{4-\pi}{2} \cdot \frac{8}{\pi} U_ш^2 \approx \frac{U_ш^2}{0,915} = 1,09 U_ш^2$ вместо $U_ш^2$. Это связано с приближённым характером формулы.

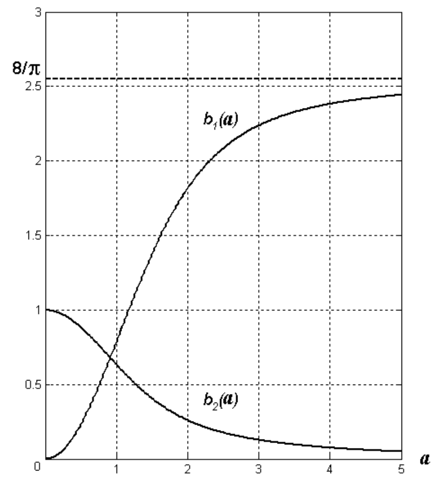

Рис. 2.10. Графики функций b_1(*a*) и b_2(*a*)

Теперь рассмотрим спектральную плотность мощности (энергетический спектр) огибающей смеси сигнала и шума. На основании теоремы Винера-Хинчина она определяется как преобразование Фурье автокорреляционной функции [1]:

$$G_{V\text{м}}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_V(\tau)e^{-j\omega\tau}d\omega\,.$$

Здесь $G_{V\text{м}}(\omega)$ – «математический» энергетический спектр, определённый как для положительных, так и для отрицательных частот.

В соответствии с выражением для АКФ огибающей энергетический спектр приближённо равен сумме двух составляющих, уровень которых зависит от отношения сигнал-шум:

$$G_V(F)\approx G_{V1}(F)+G_{V2}(F)\,.$$

Первое слагаемое определяется выражением

$$G_{V1}(F)=b_1(a)\frac{4-\pi}{2}\cdot 4\int\limits_0^{\infty}U_\text{ш}^2\psi(\tau)\cos(2\pi F\tau)d\tau=b_1(a)\frac{4-\pi}{2}G_{U_\text{ш}^\text{c}}(F)\,,$$

где $G_{U_\text{ш}^\text{c}}(F)$ – энергетический спектр косинусной низкочастотной составляющей шума. $G_{V1}(F)$ имеет вид энергетического спектра шума, сдвинутого на нулевую частоту. Второе слагаемое определяется выражением

$$G_{V2}(F)=b_2(a)\frac{4-\pi}{2}\cdot 4\int\limits_0^{\infty}U_\text{ш}^2\psi^2(\tau)\cos(2\pi F\tau)d\tau\,.$$

Можно показать, что поскольку под знаком интеграла здесь стоит квадрат функции $\psi(\tau)$, то эта составляющая имеет вид результата свёртки энергетического спектра шума, сдвинутого на нулевую частоту, с ним же самим.

Наиболее простой вид имеют выражения для составляющих энергетического спектра огибающей в случае БВЧ с прямоугольной АЧХ:

$$G_{V1}(F)=(4-\pi)b_1(a)K_{0.\text{БВЧ}}^2G_0 \text{ при } F\in[0,\ \Pi_\text{ш}/2],$$

$$G_{V2}(F)=(4-\pi)b_2(a)K_{0.\text{БВЧ}}^2G_0\frac{\Pi_\text{ш}-F}{\Pi_\text{ш}} \text{ при } F\in[0,\ \Pi_\text{ш}].$$

Здесь $\Pi_\text{ш}$ – шумовая полоса пропускания БВЧ; $K_{0.\text{БВЧ}}$ – коэффициент усиления БВЧ; $G_0=(U_\text{ш}/K_{0\ \text{БВЧ}})^2/\Pi_\text{ш}$ – спектральная плотность белого шума на входе БВЧ. Первая составляющая $G_{V1}(F)$ имеет форму прямоугольника с основанием $\Pi_\text{ш}/2$, вторая составляющая $G_{V2}(F)$– форму треугольника с основанием $\Pi_\text{ш}$ (рис. 2.11). Энергетический спектр шумового напряжения на выходе АД равен

$$G_{U_\text{д}}(F)=K_\text{д}^2G_V(F).$$

В отсутствие сигнала энергетический спектр шума на выходе АД равен

$$G_{U_\text{д}}(F)\approx(4-\pi)K_\text{д}^2K_{0.\text{БВЧ}}^2G_0\frac{\Pi_\text{ш}-F}{\Pi_\text{ш}} \text{ при } F\in[0,\ \Pi_\text{ш}].$$

Графики рассчитанного по этой формуле и полученного на модели энергетического спектра шума на выходе АД при $K_{\text{д}} = 1$ и $\Pi_{\text{ш}} = 20$ кГц изображены на рис. 2.12.

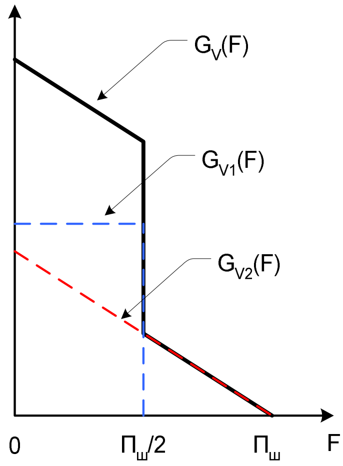

Рис. 2.11. Составляющие энергетического спектра шума на выходе АД

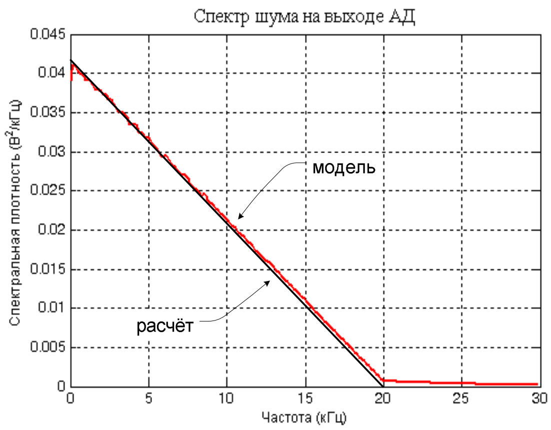

Рис. 2.12. Энергетический спектр шума на выходе АД при отсутствии сигнала

Видно, что из-за приближённого характера формулы для $G_V(F)$ она не учитывает высокочастотные составляющие шума за пределами частоты, равной $\Pi_{\text{ш}}$. При практических расчётах этими составляющими обычно пренебрегают и считают, что спектр шума на выходе АД имеет треугольную форму.

При большом отношении сигнал-шум ($a >> 1$) форма энергетического спектра шума на выходе АД близка к прямоугольной. Меньшая ширина спектра шума на выходе АД в этом случае по сравнению со случаем воздействия чистого шума объясняется тем, что огибающая шума при провалах до нуля имеет изломы, тогда как у огибающей смеси сигнала и шума их практически нет.

Формулу для энергетического спектра огибающей шума в случае прямоугольного спектра шума можно получить и на основе более наглядных рассуждений. Поскольку АКФ косинусной составляющей узкополосного шума равна

$$K_{U_{\text{ш}}^{\text{c}}} = U_{\text{ш}}^2 \psi(\tau),$$

то функция $\psi(\tau)$ представляет собой нормированную АКФ косинусной составляющей шума:

$$\psi(\tau) = \rho_{U_{\text{Ш}}^{\text{c}}}(\tau).$$

Косинусная составляющая – это низкочастотный случайный процесс. Его математический (двусторонний) энергетический спектр получается сдвигом спектра узкополосного шума на нулевую частоту. Следовательно, огибающая нормированной АКФ шума $\psi(\tau)$ имеет математический спектр $G_{U_{\text{ш.м}}^{\text{c}}}(\Omega)$. По теореме о свёртке квадрату АКФ $\psi^2(\tau)$ соответствует свёртка спектра $G_{U_{\text{ш.м}}^{\text{c}}}(\Omega)$ с самим собой:

$$\psi^2(\tau) \;\Leftrightarrow\; G_{U_{\text{ш.м}}^{\text{c}}}(\Omega) * G_{U_{\text{ш.м}}^{\text{c}}}(\Omega).$$

Для прямоугольного спектра шума эта свёртка имеет вид треугольника с основанием $\Pi_ш$ и высотой $G_U(0)$. Для определения $G_U(0)$ приравняем два выражения для дисперсии огибающей шума. С одной стороны, по формуле площади треугольника

$$\sigma_U^2 = \int_0^\infty G_U(F)dF = \frac{1}{2}\Pi_ш G_U(0);$$

с другой стороны,

$$\sigma_U^2 = \frac{4-\pi}{2}U_ш^2 = \frac{4-\pi}{2}G_0\Pi_ш K_{0.БВЧ}^2 .$$

Приравнивая эти два выражения, получим:

$$\frac{1}{2}\Pi_ш G_U(0) = \frac{4-\pi}{2}G_0\Pi_ш K_{0.БВЧ}^2 ,$$

откуда следует

$$G_U(0) = (4-\pi)G_0\Pi_ш K_{0.БВЧ}^2 ,$$

что совпадает с ранее приведённым выражением.

Литература

1. **Карташёв В.Г.**, Шалимова Е.В. Основы теории случайных процессов. М.: Издательство МЭИ, 2005.

2. **Радиоприёмные** устройства / Под ред. В.И.Сифорова. М.: Советское радио, 1974.